MA2115 Clase 6: Series de Taylor y MacLaurin. Estimación de errores.

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Series de Taylor

Una vez encontrados los valores de x para los cuales las series de potencias convergen, nos queda la pregunta: ¿cuáles funciones pueden representarse como series de potencias en cada intervalo en el cual están definidas? Es decir, existe un procedimiento inverso para hallar valores $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots, \tag{1}$$

en algún intervalo que sea un entorno de a. Existe un procedimiento muy sencillo, basado en el hecho que la serie de potencias tiene derivadas de todos los ordenes en el interior de su conjunto de convergencia. Observemos que, si la ecuación 1 se cumple, entonces la podemos derivar con respecto a x, en ambos miembros repetidas veces, para obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots, \\
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots, \\
f''(x) &= 2c_2 + 3!c_3(x-a) + 3 \times 4c_4(x-a)^2 + \cdots, \\
f'''(x) &= 3!c_3 + 4!c_4(x-a) + \cdots, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!c_n + \text{ términos que se anulan en } x = 0.
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2c_2$, $f'''(a) = 3!c_3$, etc. y, en general, $f^{(n)} = n!c_n$, con lo cual $c_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}$.

Hemos demostrado el siguiente:

Teorema 1 *Supongamos que una función f satisface*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots,$$

para cada x en un entorno de a. Entonces, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, para cada $n \geq 1$.

Ejemplo 1 *Sea* $f(x) = \ln(x+1)$. *Hemos visto que* $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. *Por lo tanto,* $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$ *y, usando la fórmula* $f^{(n)}(a) = c_n n!$, *tenemos que* $\dfrac{d^n \ln}{dx^n}(1) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}n! = (-1)^{n-1}(n-1)!$. *Es decir, algunas veces, la fórmula funciona también en el sentido opuesto, para encontrar las derivadas de una función en un punto dado.*

Definicion 1 (Fórmula de Taylor) *Dada una función* $f\colon Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *la cual está definida y es* n*-veces derivable en un entorno de* $a \in Dom(f)$, *definimos el* n*-ésimo polinomio de Taylor mediante*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si, además, f *es tiene derivadas de todos los ordenes, entonces definimos la serie de Taylor, o serie de Taylor–MacLaurin, mediante*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\cdots.$$

Antes de enunciar el resultado principal acerca de las series de Taylor–MacLaurin, veamos algunos ejemplos para funciones infinitamente derivables (es decir, con derivadas de todos los ordenes).

Ejemplo 2 *Sea* $f(x) = (x+b)^n$, *donde* b *es constante y* n *es un número entero positivo. Entonces,* $f'(x) = n(x+b)^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)(x+b)^{n-2}$, *etc. Si hemos demostrado que* $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+b)^{n-k}$ *para algún* k, *entonces* $f^{k+1}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(x+b)^{n-k-1}$, *que coincide con substituir* k *por* $k+1$ *en* $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+b)^{n-k}$ *y, por lo tanto, en virtud del principio de inducción,* $f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+b)^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x+b)^{n-k}$, *para todo entero* $k \geq 0$. *Observemos que* $f^{(k)}(x) = 0$, *para todo* $k > n$ *y, en consecuencia, la serie de Taylor–MacLaurin para* $f(x) = (x+b)^n$, *en* $x = 0$ *digamos, es una suma finita está dada por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}b^{n-k}x^k,$$

es decir, hemos obtenido la fórmula binomial de Newton $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k}$..

Ejemplo 3 *Sea* $f(x) = e^x$. *Entonces* $f^(n)(x) = e^x$, *para todo* $n \geq 0$, *de donde*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!},$$

y, en particular, para $a = 0$, *obtenemos la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, *la cual converge en todo* $\mathbb{R}$.

El siguiente es una generalización del teorema del valor medio.

Teorema 2 *Sea una función $f\colon Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual está definida y es $(n+1)$-veces derivable en un entorno $(a-r, a+r)$ de $a \in Dom(f)$. Entonces, para cada $x \in (a-r, a+r)$ existe un c entre x y a tal que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor de f centrado en a.

Definicion 2 *Definimos $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, y lo llamamos el n-ésimo resto.*

Teorema 3 (Teorema de Taylor) *Sea f una función con derivadas de todos los ordenes en algún intervalo $(a-r, a+r)$. Una condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor*

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

represente a la función f, en dicho intervalo, es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0,$$

para cada $c \in (a-r, a+r)$.

Ejemplo 4 *Encuentre la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ centrada en $c = 0$, y determine si la serie representa a $\operatorname{sen}(x)$ en un entorno de $c = 0$.*

Demostración: Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Entonces las derivadas de f son $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x) = f(x)$, y se repiten. En general, usando el hecho que cada número natural n puede expresarse en la forma $n = 4k + r$, donde $r = 0, 1, 2$ o 3, tenemos que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad n = 4k, \\ \cos(x) & \text{si} \quad n = 4k+1, \\ -\operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad n = 4k+2, \\ -\cos(x) & \text{si} \quad n = 4k+3. \end{cases}$$

Por lo tanto, el valor de cero de estas derivadas es

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 4k, \\ 1 & \text{si} \quad n = 4k+1, \\ 0 & \text{si} \quad n = 4k+2, \\ -1 & \text{si} \quad n = 4k+3. \end{cases}$$

Así, la serie de Taylor asociada a $\operatorname{sen}(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!}x^{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)!}x^{4k+3} \\ &= \left(x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^11}{11!} + \cdots\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^11}{11!} + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$ (por que $f^{(}n) = \pm \operatorname{sen}(x)$ ó $\pm \cos(x)$), tenemos que

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = 0.$$

Esto último demuestra que el resto $R_n(x)$ tiende a cero, para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, la serie $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Correcciones: Boris Iskra

May 13, 2008